Pentatic Mathematics Competition III

Wildabandon

8 Juni 2020

I

Soal

PETUNJUK

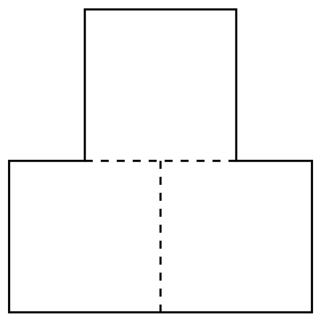
1. Kerjakan soal-soal berikut dengan jujur agar mendapatkan manfaat yang maksimal.
2. Waktu pengerjaan soal adalah selama tanggal 8 Juni 2020 maksimal jam $23:59$.
3. Jawaban setiap soal dipastikan bilangan cacah, yaitu bilangan bulat $0; 1; 2; 3$; dan seterusnya.
4. Jawab soal-soal berikut tanpa menuliskan satuan, koma (,), titik (.), dan lain-lain.
5. Soal dibagi menjadi 2 bagian: kemampuan dasar (nomor 1 sampai 10) dan kemampuan lanjut (nomor 11 sampai 20).
6. Untuk kemampuan dasar :
   a) Jika soal dijawab **benar**, maka mendapatkan nilai 2 (dua) poin,
   b) Jika soal dijawab **salah**, maka mendapatkan nilai -1 (minus satu) poin,
   c) Jika soal **tidak dijawab (kosong)**, maka mendapatkan nilai 0 (nol) poin.
7. Untuk kemampuan lanjut :
   a) Jika soal dijawab **benar**, maka mendapatkan nilai 5 (lima) poin,
   b) Jika soal dijawab **salah**, maka mendapatkan nilai 0 (nol) poin,
   c) Jika soal **tidak dijawab (kosong)**, maka mendapatkan nilai 0 (nol) poin.

1 Kemampuan Dasar

1. Diberikan dua bilangan asli berurutan. Jika bilangan yang lebih besar habis dibagi dengan bilangan yang lebih kecil, tentukan jumlah dua bilangan tersebut.

2. Misalkan a dan b adalah akar-akar dari persamaan kuadrat $x^2 - 8x + 4 = 0$. Tentukan nilai $a^3 + b^3$.

3. Gambar berikut merupakan lapangan sebagai tempat latihan Naruto terbentuk dari tiga persegi yang kongruen (sama besar). Pada pinggir lapangan dibuat pagar dengan harga Rp150.000,00 setiap 2 meter. Jika seluruh biaya yang dibutuhkan untuk membuat pagar adalah Rp2.700.000,00, tentukan luas dari lapangan tersebut dalam satuan meter persegi.



4. Di sebuah kotak terdiri dari dua jenis senjata: shuriken dan kunai. Terdapat 5 kunai yang identik dan 3 shuriken yang identik. Jika peluang terambilnya 2 senjata dengan syarat masing-masing jenis harus terambil dapat dinyatakan pecahan paling sederhana $\frac{a}{b}$, tentukan nilai $a + b$.

5. Tentukan nilai dari
$$2020 - 2017 + 2014 - 2011 + 2008 - \cdots - 7 + 4 - 1$$

6. Tentukan angka satuan dari $(22^{22} + 29^{29})^{36}$.

7. Diberikan a dan b bilangan real sehingga $ab = 4$. Tentukan nilai minimum $a^8 + b^8$.

8. Tentukan banyak pasangan bilangan bulat (x, y) dengan $x \neq 0$ yang memenuhi
$$3y + 1 - \frac{4}{x} = \frac{3y}{2x}$$

9. Pada tahun ini, aku berulang tahun pada 4 Mei 2020. Jika 2020 hari lagi bertepatan dengan tanggal x, bulan ke-y, dan tahun z, tentukan nilai $x + y + z$.

   Catatan : Bulan ke-1 adalah bulan Januari, bulan ke-2 adalah bulan Februari, bulan ke-3 adalah bulan Maret, dan seterusnya sampai bulan ke-12 adalah bulan Desember.

10. Diberikan trapesium siku-siku $ABCD$ dengan $\angle BAD = \angle CDA = 90°$. Misalkan T merupakan perpotongan dari AC dan BD. Diketahui panjang $AB = 3CD$ dan panjang $BD = 2AC$. Jika nilai dari $\frac{DT^2}{AB^2}$ dapat dinyatakan dalam bentuk pecahan paling sederhana $\frac{a}{b}$, tentukan nilai $10a + b$.

2 Kemampuan Lanjut

11. Diketahui tiga bilangan membentuk barisan geometri yang berjumlah 42 dan rasio lebih besar dari 1. Jika suku ketiga dikurangi dengan 6, maka tiga bilangan tersebut membentuk barisan aritmatika. Misalkan b adalah beda dari barisan aritmatika yang terbentuk dan r adalah rasio dari barisan geometri semula. Tentukan nilai $b + r$.

12. Tentukan banyak pasangan bilangan bulat (x, y) yang memenuhi $x^2 + 6x = 1 + 2^y$.

13. Suatu bilangan asli n dikatakan *ketupat* jika terdapat bilangan bulat x yang memenuhi

$$n = x^2 + x + 1$$

Tentukan banyak bilangan asli n dengan $1 \leq n \leq 2020$ yang *ketupat*.

14. Tentukan tiga digit terakhir dari

$$1 \times 2 + 3 \times 4 + 5 \times 6 + 7 \times 8 + \cdots + 2019 \times 2020$$

15. Tentukan bilangan bulat tak negatif n sehingga $\sqrt{2^n + 2^{2020}}$ merupakan bilangan bulat.

16. Misalkan $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \cdots, (x_n, y_n)$ adalah semua pasangan bilangan real (x, y) dengan $x, y \neq -1$ yang memenuhi

$$\frac{x+1}{y+1} = y \quad \text{dan} \quad \frac{y+1}{x+1} = x$$

Tentukan nilai $x_1 + y_1 + x_2 + y_2 + x_3 + y_3 + \cdots + x_n + y_n$.

17. Diberikan a, b, c memenuhi sistem persamaan

$$\begin{aligned} a^2 + (2b)^2 + (3c)^2 &= 1^3 + 2^3 + 3^3 \\ (2a)^2 + (3b)^2 + (4c)^2 &= 2^3 + 3^3 + 4^3 \\ (3a)^2 + (4b)^2 + (5c)^2 &= 3^3 + 4^3 + 5^3 \end{aligned}$$

Tentukan nilai dari $(4a)^2 + (5b)^2 + (6c)^2$.

18. Tentukan banyak cara menaiki sebuah tangga yang memiliki 8 anak tangga dengan syarat:
    a) Tidak dapat kembali (turun) ke anak tangga yang telah dilewati,
    b) Dalam satu langkah dapat melangkah sejauh 1 anak tangga atau 2 anak tangga.
    c) Tidak diperbolehkan melangkah sejauh 2 anak tangga secara berturut-turut.

19. Diberikan trapesium $ABCD$ dengan panjang $AB = 18, BC = \sqrt{137}$, dan $CD = 4$. Misalkan M titik tengah sisi AB. Lingkaran Γ yang melalui titik A, M, dan D memotong sisi CD di titik N. Jika panjang $MN = 5$, tentukan luas $MBCN$.

20. Tentukan banyak bilangan asli n yang kurang dari 100 sehingga tepat sebanyak 9 pasangan bilangan asli (x, y) yang memenuhi

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{n}$$

II

Solusi

1 Kemampuan Dasar

1. Diberikan dua bilangan asli berurutan. Jika bilangan yang lebih besar habis dibagi dengan bilangan yang lebih kecil, tentukan jumlah dua bilangan tersebut.

   Jawab: $\boxed{3}$

   Misalkan dua bilangan tersebut adalah a dan $a+1$ dengan a bilangan asli. Karena $(a+1)$ habis dibagi a, maka $S = \dfrac{a+1}{a}$ merupakan bilangan bulat. Maka

   $$S = \frac{a+1}{a} = 1 + \frac{1}{a}$$

   Agar S bilangan bulat, maka a merupakan faktor dari 1 yang menyimpulkan $a = 1$ dan $a + 1 = 2$. Jadi, dua bilangan tersebut adalah 1 dan 2 yang jumlahnya $1 + 2 = \boxed{3}$.

   > **Komentar.** Sebanyak 97.8% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Soal ini dapat diselesaikan dengan memanfaatkan sifat keterbagian. Selain itu, kita dapat meninjau bahwa dua bilangan asli berurutan memiliki faktor persekutuan terbesar 1 sehingga salah satu bilangan pasti bernilai 1. Demikian soal ini termasuk **sangat mudah**.

2. Misalkan a dan b adalah akar-akar dari persamaan kuadrat $x^2 - 8x + 4 = 0$. Tentukan nilai $a^3 + b^3$.

   Jawab: $\boxed{416}$

   Menurut Vietta, maka

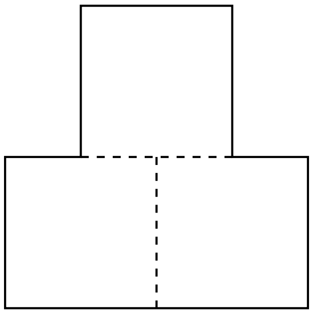
   $$a + b = \frac{-(-8)}{1} = 8 \quad \text{dan} \quad ab = \frac{4}{1} = 4$$

   Maka

   $$a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b) = 8^2 - 3 \cdot 4 \cdot 8 = 512 - 96 = \boxed{416}$$

   > **Komentar.** Sebanyak 42.5% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Soal ini memanfaatkan Teorema Vietta, pada persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ yang memiliki akar-akar x_1 dan x_2 berlaku
   >
   > $$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \quad \text{dan} \quad x_1x_2 = \frac{c}{a}$$
   >
   > Selain itu, juga
   >
   > $$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$$
   >
   > yang berarti $a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$. Demikian soal ini termasuk tingkat kesulitan **sedang**.

3. Gambar berikut merupakan lapangan sebagai tempat latihan Naruto terbentuk dari tiga persegi yang kongruen (sama besar). Pada pinggir lapangan dibuat pagar dengan harga Rp150.000,00 setiap 2 meter. Jika seluruh biaya yang dibutuhkan untuk membuat pagar adalah Rp2.700.000,00, tentukan luas dari lapangan tersebut dalam satuan meter persegi.



Jawab: $\boxed{\mathbf{60\frac{3}{4}}}$

Misalkan panjang sisi persegi adalah s. Perhatikan bahwa keliling lapangan tersebut adalah $2s + s + 2s + s + s + s = 8s$. Biaya membuat pagar adalah Rp2.700.000,00 dengan Rp150.000,00 setiap 2 meter yang berarti Rp75.000,00 setiap 1 meter, maka

$$8s = \frac{2.700.000}{75.000} = 36$$

yang berarti $s = 4\frac{1}{2} = \frac{9}{2}$ meter. Maka luas persegi tersebut adalah $s^2 = \dfrac{81}{4}$ meter persegi. Demikian luas dari lapangangan adalah $3 \cdot \dfrac{81}{4} = \dfrac{243}{4} = \boxed{60\frac{3}{4}}$ meter persegi.

> **Komentar.** Soal ini merupakan soal bonus dikarenakan jawaban tidak bernilai bulat. Sehingga setiap peserta berhak mendapat +2 poin. Ucapan terimakasih kepada MUHAMAD LUKMAN HAKIM telah memberikan koreksi untuk soal ini.

4. Di sebuah kotak terdiri dari dua jenis senjata: shuriken dan kunai. Terdapat 5 kunai yang identik dan 3 shuriken yang identik. Jika peluang terambilnya 2 senjata dengan syarat masing-masing jenis harus terambil dapat dinyatakan pecahan paling sederhana $\dfrac{a}{b}$, tentukan nilai $a + b$.

   Jawab: $\boxed{\mathbf{43}}$

   Perhatikan bahwa haruslah masing-masing terambil 1 shuriken dan 1 kunai. Sehingga peluangnya adalah

$$\frac{C_1^5 \cdot C_1^3}{C_2^8} = \frac{\frac{5!}{4!1!} \cdot \frac{3!}{2!1!}}{\frac{8!}{6!2!}} = \frac{5 \cdot 3}{28} = \frac{15}{28}$$

   Demikian $a = 15$ dan $b = 28$ yang berarti $a + b = 15 + 28 = \boxed{43}$.

> **Komentar.** Sebanyak 38.2% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Pengetahuan dasar yang perlu dikuasai adalah kombinasi dan permutasi serta konsep peluang. Demikian soal ini dikategorikan tingkat kesulitan **sedang-sulit**.

5. Tentukan nilai dari

$$2020 - 2017 + 2014 - 2011 + 2008 - \cdots - 7 + 4 - 1$$

   Jawab: $\boxed{\mathbf{1011}}$

   Tinjau bahwa

$$2020 - 2017 + 2014 - 2011 + \cdots + 4 - 1 = \underbrace{3 + 3 + \cdots + 3}_{\text{sebanyak } n} = 3n$$

Banyak suku pada ruas kanan sama dengan menentukan banyak suku pada barisan $2020, 2014, 2008, \cdots, 4$. Perhatikan bahwa barisan tersebut merupakan barisan aritmetika dengan beda $b = -6$ dan suku pertama $a = 2020$. Maka

$$U_n = a + (n-1)b = 2020 + (n-1)(-6) = 2020 - 6n + 6 = 2026 - 6n$$

dengan U_n menyatakan suku ke-n. Untuk $U_n = 4$, maka

$$\begin{aligned} 2026 - 6n &= 4 \\ 6n &= 2022 \\ 3n &= 1011 \end{aligned}$$

Demikian $2020 - 2017 + 2014 - 2011 + 2008 - \cdots - 7 + 4 - 1 = \boxed{1011}$.

Komentar. Sebanyak 78.7% berhasil menjawab soal ini dengan benar. Langkah yang dapat dilakukan yaitu dengan mengolompokkan menjadi

$$(2020 - 2017) + (2014 - 2011) + (2008 - 2005) + \cdots + (10 - 7) + (4 - 1)$$

Menentukan banyak kelompok diatas dapat memanfaatkan barisan aritmetika seperti pada solusi yang disajikan. Demikian soal ini termasuk **mudah**.

6. Tentukan angka satuan dari $(22^{22} + 29^{29})^{36}$.

Jawab: $\boxed{\mathbf{1}}$

Misalkan $n = 22^{22} + 29^{29}$.

Tinjau bahwa $22 \equiv 2 \pmod{10}$.

$$\begin{aligned} 2^1 &\equiv 2 \pmod{10} \\ 2^2 &\equiv 4 \pmod{10} \\ 2^3 &\equiv 8 \pmod{10} \\ 2^4 &\equiv 6 \pmod{10} \\ 2^5 &\equiv 2 \pmod{10} && \text{(Berulang)} \end{aligned}$$

Pola tersebut berulang setelah 4 pola. Demikian

$$22^{22} \equiv 2^{22 \pmod 4} \equiv 2^2 \equiv 4 \pmod{10}$$

Tinjau bahwa $29 \equiv -1 \pmod{10}$ yang berakibat

$$29^{29} \equiv (-1)^{29} \equiv -1 \equiv 9 \pmod{10}$$

Demikian

$$n = 22^{22} + 29^{29} \equiv 4 + 9 \equiv 13 \equiv 3 \pmod{10}$$

Maka $n^{36} \equiv 3^{36} \pmod{10}$. Tinjau bahwa $3^2 \equiv -1 \pmod{10}$. Sehingga

$$n^{36} \equiv 3^{36} \equiv \left(3^2\right)^{18} \equiv (-1)^{18} \equiv 1 \pmod{10}$$

Jadi, angka satuan dari $(22^{22} + 29^{29})^{36}$ adalah $\boxed{1}$.

> **Komentar.** Sebanyak 93.6% berhasil menjawab soal ini dengan benar. Selain menggunakan modulo, kita dapat menggunakan pola angka satuan dari 22^{22} dan 29^{29}. Kemudian kita dapat menemukan angka satuan dari $n = 22^{22} + 29^{29}$. Demikian soal ini dikategorikan **sangat mudah**.

7. Diberikan a dan b bilangan real sehingga $ab = 4$. Tentukan nilai minimum $a^8 + b^8$.

   Jawab: $\boxed{\mathbf{512}}$

   Karena a, b bilangan real, jelas bahwa $a^8 + b^8 \geq 0$ dan $\left(a^4 - b^4\right)^2 \geq 0$. Tinjau

$$a^8 + b^8 = \left(a^4 - b^4\right)^2 + 2a^4b^4 \geq 2a^4b^4 = 2(ab)^4 = 2 \cdot 4^4 = 512$$

   Demikian $a^8 + b^8 \geq 512$ yang berarti nilai minimumnya adalah $\boxed{512}$. Kesamaan terjadi ketika $a = b = 2$ atau $a = b = -2$.

> **Komentar.** Sebanyak 70.21% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Soal ini memanfaatkan fakta bahwa a dan b bilangan real, maka $(a^n - b^n)^2 \geq 0$ untuk setiap bilangan bulat n. Kesamaan terjadi ketika $a^n - b^n = 0$. Mengecek kapan terjadi kesamaan pada suatu pertidaksamaan sangat penting karena juga sebagai bukti bahwa pertidaksamaan tersebut memenuhi. Demikian soal ini dikategorikan **mudah**.

8. Tentukan banyak pasangan bilangan bulat (x, y) dengan $x \neq 0$ yang memenuhi

$$3y + 1 - \frac{4}{x} = \frac{3y}{2x}$$

   Jawab: $\boxed{\mathbf{2}}$

   Kalikan kedua ruas dengan $2x$, diperoleh

$$\begin{aligned} 6xy + 2x - 8 &= 3y \\ 6xy + 2x - 3y &= 8 \\ 6xy + 2x - 3y - 1 &= 7 \\ (2x - 1)(3y + 1) &= 7 \end{aligned}$$

   Karena $x \neq 0$, maka $2x - 1 \neq -1$.

   - Jika $2x - 1 = 1$ dan $3y + 1 = 6$, diperoleh $(x, y) = (1, 2)$.
   - Jika $2x - 1 = 7$ dan $3y + 1 = 1$, diperoleh $(x, y) = (4, 0)$.
   - Jika $2x - 1 = -7$ dan $3y + 1 = -1$, diperoleh $(x, y) = \left(-3, -\frac{2}{3}\right)$. (tidak memenuhi)

   Jadi, ada $\boxed{2}$ pasangan (x, y) yang memenuhi.

> **Komentar.** Sebanyak 46.8% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Hal yang biasanya dilakukan jika (x, y) solusi bilangan bulat adalah dengan memfaktorkan dan hanya menyisakan konstanta. Sehingga kita tinggal meninjau faktor dari konstanta tersebut. Salah satu kesalahan yang dilakukan yaitu dengan menjawab soal ini dengan menyebutkan semua pasangan (x, y), padahal yang ditanyakan adalah banyak pasangan (x, y) yang memenuhi. Demikian soal ini dikategorikan tingkat kesulitan **sedang**.

9. Pada tahun ini, aku berulang tahun pada 4 Mei 2020. Jika 2020 hari lagi bertepatan dengan tanggal x, bulan ke-y, dan tahun z, tentukan nilai $x + y + z$.

Catatan : Bulan ke-1 adalah bulan Januari, bulan ke-2 adalah bulan Februari, bulan ke-3 adalah bulan Maret, dan seterusnya sampai bulan ke-12 adalah bulan Desember.

Jawab: $\boxed{\textbf{2050}}$

Banyak hari dari 5 Mei 2020 sampai 31 Mei 2020 adalah 27 hari.

Banyak hari dari 1 Juni 2020 sampai 31 Desember 2020 adalah $30 \cdot 3 + 31 \cdot 4 = 120 + 124 = 244$ hari.

Pada tahun 2021 ada sebanyak 365 hari.

Pada tahun 2022 ada sebanyak 365 hari.

Pada tahun 2023 ada sebanyak 365 hari.

Pada tahun 2024 ada sebanyak 366 hari (tahun kabisat).

Jumlah hari dari 5 Mei 2020 sampai 31 Desember 2024 ada sebanyak

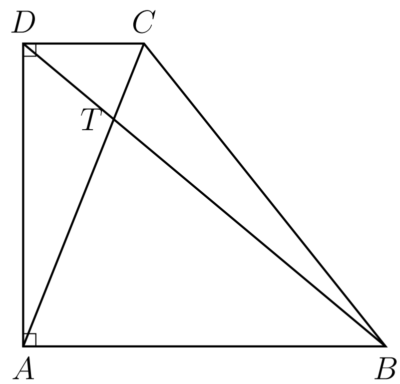
$$27 + 244 + 365 \cdot 3 + 366 = 1732 \text{ hari}$$

Kurang sebanyak $2020 - 1732 = 288$ hari lagi. Kita dapat melakukan perhitungan mundur dari tanggal 31 Desember 2025. Perhatikan bahwa kita perlu mundur sebanyak $365 - 288 + 1 = 78$ hari dari 31 Desember 2020. Banyak hari pada bulan Desember 2020 adalah 31 dan bulan November 2020 adalah 30. Tinggal $78 - 31 - 30 = 18$ hari lagi. Banyak hari pada bulan Oktober 2020 adalah 31 hari, maka bertepatan dengan tanggal $31 - 17 + 1 = 15$. Demikian bertepatan dengan tanggal 15 Oktober 2025. Maka $x = 15, y = 10$, dan $z = 2025$ yang berarti $x + y + z = \boxed{2050}$.

> **Komentar.** Sebanyak 48.9% peserta berhasil menjawab pertanyaan ini dengan benar. Dalam mengerjakan soal ini setidaknya mengetahui penanggalan masehi, yaitu 365 hari/tahun dan khususnya 366 hari untuk tahun kabisat (yaitu tahun dimana bilangannya yang habis dibagi 4, seperti tahun 2004, 2008, 2020, dan lain-lain). Soal ini membutuhkan kesabaran dan ketelitian dalam mendata. Demikian soal ini termasuk tingkat kesulitan **sedang**.

10. Diberikan trapesium siku-siku $ABCD$ dengan $\angle BAD = \angle CDA = 90°$. Misalkan T merupakan perpotongan dari AC dan BD. Diketahui panjang $AB = 3CD$ dan panjang $BD = 2AC$. Jika nilai dari $\dfrac{DT^2}{AB^2}$ dapat dinyatakan dalam bentuk pecahan paling sederhana $\dfrac{a}{b}$, tentukan nilai $10a + b$.

Jawab: $\boxed{\textbf{47}}$



Misalkan panjang $CD = a$, maka panjang $AB = 3a$. Misalkan panjang $AD = t$, maka panjang $CE = AD = t$. Misalkan juga panjang $AC = b$, maka panjang $BD = 2b$.

Perhatikan $\triangle ACD$, dengan phytagoras kita dapatkan

$$AD^2 + DC^2 = AC^2 \implies t^2 + a^2 = y^2 \tag{1}$$

Perhatikan $\triangle ABD$, dengan phytagoras kita dapatkan

$$AD^2 + AB^2 = BD^2 \implies t^2 + 9a^2 = 4y^2 \tag{2}$$

Dengan mengurangkan persamaan (2) dan persamaan (1), kita peroleh

$$\begin{aligned} t^2 + 9a^2 - t^2 - a^2 &= 4y^2 - y^2 \\ 8a^2 &= 3y^2 \\ \frac{8}{3}a^2 &= y^2 \end{aligned}$$

Karena AB sejajar dengan CD, kita peroleh bahwa

$$\angle ABD = \angle CDB \implies \angle ABT = \angle CDT \quad \text{dan} \quad \angle BAC = \angle DCA \implies \angle BAT = \angle DCT$$

Demikian $\triangle ABT$ sebangun dengan $\triangle CDT$. Demikian kita peroleh

$$\frac{DT}{BT} = \frac{DC}{AB} = \frac{a}{3a} = \frac{1}{3}$$

Sehingga $BT = 3DT$ yang mengakibatkan

$$DT = \frac{1}{4}BD = \frac{1}{4} \cdot 2y = \frac{1}{2}y \implies DT^2 = \frac{1}{4}y^2$$

Kita dapatkan

$$\frac{DT^2}{AB^2} = \frac{\frac{1}{4}y^2}{9a^2} = \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{8}{3}a^2}{9a^2} = \frac{2}{27}$$

yang berarti $a = 2$ dan $b = 27$. Demikian $10a + b = 20 + 27 = \boxed{47}$.

Komentar. Sebanyak 12.4% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Kita dapat memisalkan suatu panjang sisi dengan variabel (perubah) seperti pada solusi diatas. Sehingga kita dapat memperoleh hubungan panjang dari dua sisi. Selain itu, memperoleh hubungan dari dua sisi dapat kita peroleh dengan kesebangunan. Seperti pada soal, diatas berlaku $BT = 3DT$ karena $\triangle ABT$ sebangun dengan $\triangle CDT$. Demikian soal ini merupakan soal **sulit**.

2 Kemampuan Lanjut

11. Diketahui tiga bilangan membentuk barisan geometri yang berjumlah 42 dan rasio lebih besar dari 1. Jika suku ketiga dikurangi dengan 6, maka tiga bilangan tersebut membentuk barisan aritmatika. Misalkan b adalah beda dari barisan aritmatika yang terbentuk dan r adalah rasio dari barisan geometri semula. Tentukan nilai $b + r$.

Jawab: $\boxed{8}$

Misalkan tiga bilangan barisan geometri tersebut adalah a, ar, ar^2 dengan $r > 1$. Kita tahu bahwa

$$a + ar + ar^2 = 42 \tag{1}$$

Jika suku ketiga dikurangi 6, maka tiga bilangan tersebut membentuk barisan aritmatika. Demikian $a, ar, ar^2 - 6$ merupakan barisan aritmatika.

> **Teorema**
>
> Jika a, b, c merupakan barisan aritmatika, maka berlaku $a + c = 2b$.

Akibatnya,

$$a + ar^2 - 6 = 2ar \Longrightarrow a + ar^2 = 2ar + 6 \tag{2}$$

Subtitusikan persamaan (2) ke persamaan (1), kita peroleh

$$\begin{aligned} a + ar + ar^2 &= 42 \\ 2ar + 6 + ar &= 42 \\ 3ar &= 36 \\ ar &= 12 \end{aligned}$$

Demikian $a + ar^2 = 30$. Akibatnya,

$$\begin{aligned} a + ar^2 &= 30 \\ \frac{12}{r} + 12r &= 30 && \text{(Kalikan kedua ruas dengan } r\text{)} \\ 12 + 12r^2 &= 30r \\ 12r^2 - 30r + 12 &= 0 && \text{(Bagi kedua ruas dengan 6)} \\ 2r^2 - 5r + 2 &= 0 \\ (r-2)(2r-1) &= 0 \end{aligned}$$

yang memberikan $r = 2$ atau $r = \frac{1}{2}$. Karena haruslah $r > 1$, demikian $r = 2$. Subtitusikan ke $ar = 12$, maka $a = 6$. Sehingga barisan arimatika yang terbentuk adalah $6, 12, 18$ yang berarti $b = 6$. Demikian $b + r = 6 + 2 = \boxed{8}$.

> **Komentar.** Sebnyak 63.8% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Soal ini dapat diselesaikan dengan memanfaatkan sifat dari barisan aritmetika dan barisan geometri itu sendiri. Kemudian dapat menyelesaikannya denan persamaan kuadrat. Demikian soal ini tergolong soal **mudah-sedang**.

12. Tentukan banyak pasangan bilangan bulat (x, y) yang memenuhi $x^2 + 6x = 1 + 2^y$.

Jawab: $\boxed{\mathbf{0}}$

Tinjau bahwa $x^2 + 6x$ bilangan bulat yang berarti $1 + 2^y$ harus bilangan bulat. Sehingga $y \geq 0$.

Tinjau bahwa untuk $y = 0$ dan $y = 1$ tidak ada bilangan bulat x yang memenuhi. Asumsikan $y \geq 2$. Tinjau kedua ruas dengan modulo 2.

$$\begin{aligned} x^2 + 6x &\equiv 1 + 2^y \pmod{2} \\ x^2 &\equiv 1 \pmod{2} \end{aligned}$$

yang menyimpulkan x ganjil. Tinjau modulo 4.

$$\begin{aligned} x^2 + 6x &\equiv 1 + 2^y \pmod{4} \\ 1 + 2x &\equiv 1 \pmod{4} \\ 2x &\equiv 0 \pmod{4} \\ x &\equiv 0 \pmod{2} \end{aligned}$$

yang menyimpulkan x genap. Kontradiksi bahwa x harus ganjil. Demikian tidak ada pasangan bilangan bulat (x, y) yang memenuhi berarti banyak pasangan (x, y) yang memenuhi adalah $\boxed{0}$.

> **Komentar.** Sebanyak 53.1% berhasil menjawab soal ini dengan benar. Karena ekspresi dari kedua ruas pasti bernilai bulat, maka kita dapat memanfaatkan modulo dari kedua ruas. Jika terdapat bilangan bulat a, b, c sehingga $a = b$, maka $a \equiv b \pmod{c}$. Demikian soal ini dikategorikan tingkat kesulitan **sedang**.

13. Suatu bilangan asli n dikatakan *ketupat* jika terdapat bilangan bulat x yang memenuhi

$$n = x^2 + x + 1$$

Tentukan banyak bilangan asli n dengan $1 \leq n \leq 2020$ yang *ketupat*.

Jawab: $\boxed{\mathbf{45}}$

Tinjau bahwa $0 = x^2 + x + (1 - n)$ merupakan persamaan kuadrat variabel x. Agar memiliki akar-akar bilangan bulat, maka diskriminannya merupakan kuadrat sempurna. Sehingga dapat dituliskan

$$k^2 = \Delta = 1^2 - 4(1)(1 - n) = 1 - 4 + 4n = 4n - 3$$

untuk suatu bilangan asli k. Karena $4n - 3$ merupakan bilangan ganjil, maka haruslah k^2 bilangan ganjil yang menyimpulkan k ganjil. Tinjau bahwa $4n - 3 = k^2 \geq 0$. Demikian

$$0 \leq k^2 = 4n - 3 \leq 4 \cdot 2020 - 3 = 8077 \Longrightarrow 0 \leq k^2 \leq 8077$$

Karena k bilangan asli, maka $0 \leq k \leq 89$. Karena k bilangan ganjil, maka nilai k yang memenuhi adalah $k = 1, 3, 5, 7, \cdots, 89$ yang berarti ada 45 nilai k. Karena nilai n tergantung nilai dari k, maka banyak nilai n yang memenuhi sama dengan banyak nilai k, yaitu $\boxed{45}$.

Komentar. Sebanyak 34% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Kita tahu bahwa pada $ax^2 + bx + c = 0$ dengan $a \neq 0$ memiliki akar-akar

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Sehingga agar x_1 dan x_2 bilangan bulat, maka $\sqrt{b^2 - 4ac} = \sqrt{\Delta}$ bilangan bulat yang berarti Δ merupakan kuadrat sempurna dimana Δ diskriminan dari $ax^2 + bx + c$. Begitu juga bahwa untuk x_1 dan x_2 bernilai rasional jika Δ merupakan kuadrat dari suatu bilangan rasional. Demikian soal ini dikategorikan **sedang-susah**.

14. Tentukan tiga digit terakhir dari

$$1 \times 2 + 3 \times 4 + 5 \times 6 + 7 \times 8 + \cdots + 2019 \times 2020$$

Jawab: $\boxed{430}$

Misalkan $a_n = (2n-1)\cdot 2n$ untuk setiap bilangan asli n dan juga $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$. Tinjau bahwa kita ingin mencari nilai dari S_{1010}. Perhatikan bahwa $a_n = 4n^2 - 2n$. Kita dapatkan

$$\begin{aligned} S_{1010} &= 4 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 + 4 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 + 4 \cdot 3^2 - 2 \cdot 3 + \cdots + 4 \cdot 1010^2 - 2 \cdot 1010 \\ S_{1010} &= 4\big(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 1010^2\big) - 2(1 + 2 + 3 + \cdots + 1010) \end{aligned}$$

Teorema

Untuk setiap bilangan asli n, berlaku

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \cdots + n &= \frac{n(n+1)}{2} \\ 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \end{aligned}$$

Kita peroleh

$$\begin{aligned} S_{1010} &= 4 \cdot \frac{1010 \cdot 1011 \cdot 2021}{6} - 2 \cdot \frac{1010 \cdot 1011}{2} \\ &= 2 \cdot 1010 \cdot 337 \cdot 2021 - 1010 \cdot 1011 \\ &\equiv 2 \cdot 10 \cdot 337 \cdot 21 - 10 \cdot 11 \pmod{1000} \\ &\equiv 42 \cdot 3370 - 110 \pmod{1000} \\ &\equiv 42 \cdot 370 - 110 \pmod{1000} \\ &\equiv 15.540 - 110 \pmod{1000} \\ &\equiv 540 - 110 \pmod{1000} \\ S_{1010} &\equiv 430 \pmod{1000} \end{aligned}$$

Jadi, tiga digit terakhir yang diminta adalah $\boxed{430}$.

Komentar. Sebanyak 51% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Jika sudah mengenal notasi sigma, dapat kita tuliskan

$$S_{1010} = \sum_{n=1}^{1010} (2n-1)2n = \sum_{n=1}^{1010} \left(4n^2 - 2n\right) = \sum_{n=1}^{1010} 4n^2 - \sum_{n=1}^{1010} 2n = 4\sum_{n=1}^{1010} n^2 - 2\sum_{n=1}^{1010} n$$

> dimana
> $$\sum_{n=1}^{m} n^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} \quad \text{dan} \quad \sum_{n=1}^{m} n = \frac{m(m+1)}{2}$$
> Memanfaatkan modulo akan mempermudah mencari tiga digit terakhir daripada menghitungnya secara manual. Demikian soal ini dapat dikategorikan soal **sedang-sulit**.

15. Tentukan bilangan bulat tak negatif n sehingga $\sqrt{2^n + 2^{2020}}$ merupakan bilangan bulat.

Jawab: $\boxed{\textbf{2023}}$

Misalkan $\sqrt{2^n + 2^{2020}} = k$ dengan k bilangan asli. Maka $2^n + 2^{2020} = k^2$ yang ekuivalen dengan
$$2^n = k^2 - 4 = \left(k + 2^{1010}\right)\left(k - 2^{1010}\right)$$
Demikian haruslah $k + 2^{1010} = 2^x$ dan $k - 2^{1010} = 2^y$ dengan $n = x + y$. Jelas bahwa $x > y$. Kita peroleh
$$\begin{aligned} 2^x - 2^y &= k + 2^{1010} - \left(k - 2^{1010}\right) \\ 2^y\left(2^{x-y} - 1\right) &= k + 2^{1010} - k + 2^{1010} \\ 2^y\left(2^{x-y} - 1\right) &= 2 \cdot 2^{1010} \\ 2^y\left(2^{x-y} - 1\right) &= 2^{1011} \end{aligned}$$
Karena $x > y$, maka $2^{x-y} - 1$ bernilai ganjil. Demikian haruslah
$$2^y = 2^{1011} \quad \text{dan} \quad 2^{x-y} - 1 = 1$$
yang memberikan $y = 1011$ dan $x - y = 1$. Sehingga $x = 1012$. Subtitusikan, kita dapatkan $n = 1011 + 1012 = 2023$. Mudah dicek,
$$\sqrt{2^{2023} + 2^{2020}} = \sqrt{2^{2020}\left(2^3 + 1\right)} = 2^{1010} \cdot 3$$
yang berarti memenuhi.

Jadi, bilangan bulat tak negatif n yang memenuhi adalah $\boxed{2023}$.

> **Komentar.** Sebanyak 42.5% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Demikian soal ini dapat dikategorikan soal **sedang**.

16. Misalkan $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \cdots, (x_n, y_n)$ adalah semua pasangan bilangan real (x, y) dengan $x, y \neq -1$ yang memenuhi
$$\frac{x+1}{y+1} = y \quad \text{dan} \quad \frac{y+1}{x+1} = x$$
Tentukan nilai $x_1 + y_1 + x_2 + y_2 + x_3 + y_3 + \cdots + x_n + y_n$.

Jawab: $\boxed{\textbf{2}}$

Tinjau bahwa
$$xy = \frac{y+1}{x+1} \cdot \frac{x+1}{y+1} = 1$$
Perhatikan bahwa
$$\begin{aligned} \frac{x+1}{y+1} &= y \\ x + 1 &= y(y+1) \\ x + 1 &= y^2 + y \end{aligned}$$

Dengan cara yang sama, kita peroleh $y + 1 = x^2 + x$. Jumlahkan, kita dapatkan

$$\begin{aligned} x + 1 + y + 1 &= y^2 + y + x^2 + x \\ 2 &= x^2 + y^2 \\ 2 &= (x + y)^2 - 2xy \\ 2 &= (x + y)^2 - 2 \\ 4 &= (x + y)^2 \\ \pm 2 &= x + y \end{aligned}$$

- Untuk $x + y = 2$ dan juga $xy = 1$. Misalkan x dan y akar-akar dari persamaan kuadrat variabel k, maka

$$0 = k^2 - (x + y)k + xy = k^2 - 2k + 1 = (k - 1)^2$$

  yang memberikan $k = 1$. Demikian $x = y = 1$. Cek kembali ke soal, memenuhi. Demikian $(x, y) = (1, 1)$.

- Untuk $x + y = -2$ dan juga $xy = 1$. Misalkan x dan y akar-akar dari persamaan kuadrat variabel k, maka

$$0 = k^2 - (x + y)k + xy = k^2 - (-2)k + 1 = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$$

  yang memberikan $k = -1$. Demikian $x = y = -1$ yang berarti tidak memenuhi.

Demikian semua pasangan (x, y) yang memenuhi adalah $(x, y) = (1, 1)$ yang berarti $x_1 + y_1 + x_2 + y_2 + x_3 + y_3 + \cdots + x_n + y_n = 1 + 1 = \boxed{2}$.

Komentar. Sebanyak 51% perserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Jika kita mendapatkan suatu persamaan (misalkan) $x_1 + x_2 = a$ dan $x_1x_2 = b$, maka kita dapat memisalkan x_1 dan x_2 merupakan akar-akar suatu persamaan kuadrat. Seperti,

$$0 = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = x^2 - ax + b$$

Demikian soal ini dapat dikategorikan soal **sedang**.

17. Diberikan a, b, c memenuhi sistem persamaan

$$\begin{aligned} a^2 + (2b)^2 + (3c)^2 &= 1^3 + 2^3 + 3^3 \\ (2a)^2 + (3b)^2 + (4c)^2 &= 2^3 + 3^3 + 4^3 \\ (3a)^2 + (4b)^2 + (5c)^2 &= 3^3 + 4^3 + 5^3 \end{aligned}$$

Tentukan nilai dari $(4a)^2 + (5b)^2 + (6c)^2$.

Jawab: $\boxed{\mathbf{387}}$

Mudah dihitung bahwa

$$\begin{aligned} a^2 + (2b)^2 + (3c)^2 &= 36 \\ (2a)^2 + (3b)^2 + (4c)^2 &= 99 \\ (3a)^2 + (4b)^2 + (5c)^2 &= 216 \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} a^2x + (a + 1)^2y + (a + 2)^2z &= (a + 3)^2 \\ a^2x + a^2y + 2ay + y + a^2z + 4az + 4z &= a^2 + 6a + 9 \\ (x + y + z)a^2 + (2y + 4z)a + (y + 4z) &= a^2 + 6a + 9 \end{aligned}$$

yang berarti haruslah memenuhi

$$x + y + z = 1, \quad 2y + 4z = 6, \quad y + 4z = 9$$

Kurangkan $y + 4z = 9$ dengan $2y + 4z = 6$, memberikan

$$6 - 9 = 2y + 4z - y - 4z \Longrightarrow y = -3$$

Kita peroleh $z = 3$. Demikian $x = 1$. Sehingga didapatkan

$$(4a)^2 + (5b)^2 + (6c)^2 = 1 \cdot 36 - 3 \cdot 99 + 3 \cdot 216 = 36 - 297 + 648 = \boxed{387}$$

Komentar. Sebanyak 27.6% berhasil menjawab soal ini dengan benar. Misalkan

$$a^2 + (2b)^2 + (3c)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 \quad (1)$$
$$(2a)^2 + (3b)^2 + (4c)^2 = 2^3 + 3^3 + 4^3 \quad (2)$$
$$(3a)^2 + (4b)^2 + (5c)^2 = 3^3 + 4^3 + 5^3 \quad (3)$$
$$(4a)^2 + (5b)^2 + (6c)^2 = k \quad (4)$$

Untuk mendapatkan persamaan (4), kita perlu mengolah persamaan (1), (2), dan (3). Misalkan $x \times (1) + y \times (2) + z \times (3) = (4)$ seperti pada solusi diatas sehingga kita peroleh nilai x, y, z yang memenuhi. Demikian soal ini dapat dikategorikan soal **sulit**.

18. Tentukan banyak cara menaiki sebuah tangga yang memiliki 8 anak tangga dengan syarat:
    a) Tidak dapat kembali (turun) ke anak tangga yang telah dilewati,
    b) Dalam satu langkah dapat melangkah sejauh 1 anak tangga atau 2 anak tangga.
    c) Tidak diperbolehkan melangkah sejauh 2 anak tangga secara berturut-turut.

    Jawab: $\boxed{\mathbf{19}}$

    Misalkan $f(n)$ menyatakan banyak cara menaiki sebuah tangga yang memiliki n anak tangga sesuai syarat tersebut. Demikian kita ingin mencari $f(8)$.

    (a). Jika langkah pertama melangkah sejauh anak tangga, maka ada $f(n-1)$ cara.

    (b). Jika langkah pertama melangkah sejauh dua anak tangga, maka langkah selanjutnya harus melangkah sejauh satu anak tangga. Sehingga ada $f(n-3)$ cara.

    Demikian dapat disimpulkan bahwa $f(n) = f(n-1) + f(n-3)$ untuk $n \geq 4$. Mudah saja dicari bahwa $f(1) = 1, f(2) = 2$, dan $f(3) = 3$. Kita peroleh

$$\begin{aligned} f(4) &= f(3) + f(1) = 3 + 1 = 4 \\ f(5) &= f(4) + f(2) = 4 + 2 = 6 \\ f(6) &= f(5) + f(3) = 6 + 3 = 9 \\ f(7) &= f(6) + f(4) = 9 + 4 = 13 \\ f(8) &= f(7) + f(5) = 13 + 6 = 19 \end{aligned}$$

Jadi, banyak cara menaiki 8 anak tangga tersebut adalah $\boxed{19}$ cara.

Komentar. Sebanyak 27.6% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Dalam soal kombinatorika, kita dapat memanfaatka rekursif seperti solusi diatas. Kita juga dapat melakukannya dengan mendata, seperti (salah satu kasus)

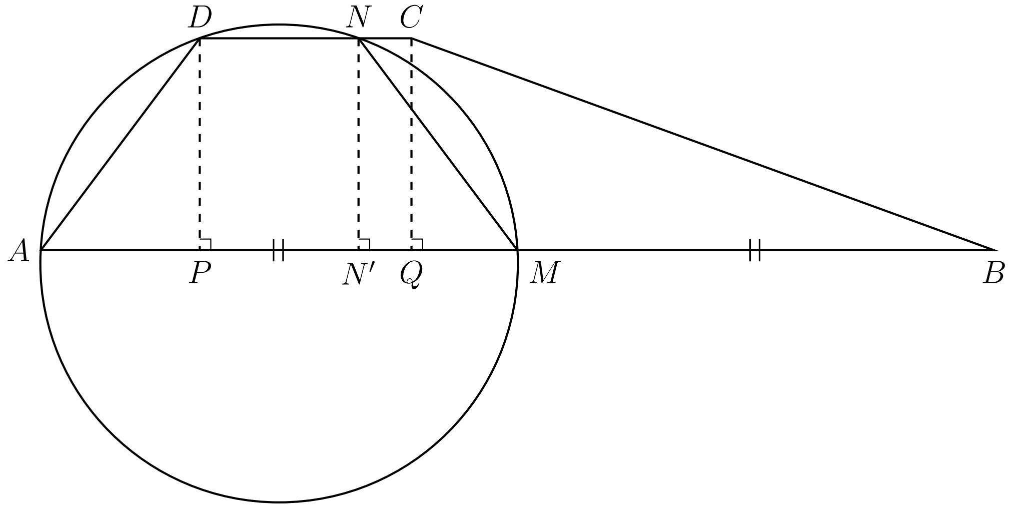
$$1 \quad 2 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1$$

> dan menghitung berapa banyak permutasinya (diserahkan kepada pembaca sebagai latihan). Demikian soal ini dapat dikategorikan soal **sulit**.

19. Diberikan trapesium $ABCD$ dengan panjang $AB = 18, BC = \sqrt{137}$, dan $CD = 4$. Misalkan M titik tengah sisi AB. Lingkaran Γ yang melalui titik A, M, dan D memotong sisi CD di titik N. Jika panjang $MN = 5$, tentukan luas $MBCN$.

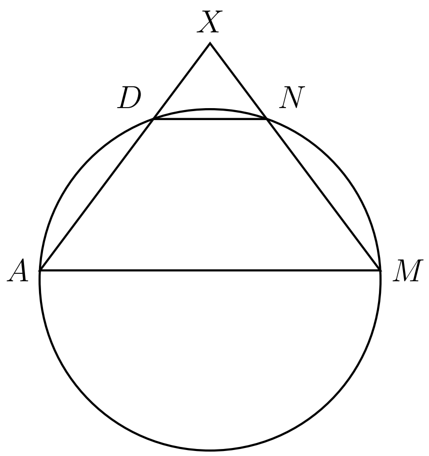
Jawab: $\boxed{20}$

Tarik garis tinggi dari titik D dan C ke sisi AB seperti gambar berikut.



> **Lemma**
> Karena $AMND$ segiempat talibusur dan AM sejajar DN, maka panjang $AD = MN$.

Bukti. Misalkan perpanjang AD dan MN berpotongan di titik X.



Karena AM sejajar DN, akibatnya

$$\angle AMX = \angle DNX \quad \text{dan} \quad \angle MAX = \angle NDX$$

Tapi, karena $AMND$ segiempat talibusur berakibat juga

$$\angle DNX = \angle MAD = \angle MAX = \angle NDX = \angle AMX = \angle DNX$$

Demikian dapat disimpulkan bahwa $\angle AMX = \angle MAX$ yang berarti $\angle AMN = \angle MAD$. Demikian $AMND$ merupakan trapesium samakaki yang berarti panjang $AD = MN$.

□

Dari lemma tersebut, kita peroleh panjang $AD = MN = 5$. Tinjau bahwa panjang $PQ = DC = 4$. Karena panjang $AB = 18$, maka panjang $AP + QB = 14$. Misalkan panjang $AP = x$, maka panjang $QB = 14 - x$. Perhatikan $\triangle APD$, dengan phytagoras diperoleh

$$PD^2 = AD^2 - AP^2 = 25 - x^2$$

Perhatikan $\triangle BQC$, dengan phytagoras diperoleh

$$QC^2 = BC^2 - BQ^2 = 137 - (14 - x)^2$$

Perhatikan bahwa panjang $PD = QC$ yang berarti $PD^2 = QC^2$. Sehingga

$$PD^2 = QC^2 \Longrightarrow 25 - x^2 = 137 - (14 - x)^2$$

Dengan menyelesaikan persamaan tersebut,

$$\begin{aligned}
25 - x^2 &= 137 - (14 - x)^2 \\
(14 - x)^2 - x^2 &= 137 - 25 \\
(14 - x + x)(14 - x - x) &= 112 \\
14(14 - 2x) &= 112 \\
28(7 - x) &= 112 \\
7 - x &= 4 \\
x &= 3
\end{aligned}$$

Demikian panjang $AP = 3$. Karena panjang $AD = MN$ dan panjang $PD = NN'$, demikian $\triangle APD$ kongruen dengan $\triangle MN'N$. Demikian panjang $AP = MN' = 3$. Karena M titik tengah, maka panjang $AM = 9$. Sehingga panjang $PN' = 3$. Kita peroleh panjang $DN = PN' = 3$. Definisikan $[MBNC]$ menyatakan luas $MBNC$. Maka

$$[MBNC] = \frac{NC + MB}{2} \cdot NN' = \frac{1 + 9}{2} \cdot 4 = 10 \cdot 2 = \boxed{20}$$

> **Komentar.** Sebanyak 10.6% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Salah satu alternatif yang dapat digunakan adalah membutkikan panjang $MN = AD$. Hal ini dapat dibuktikan dengan menggunakan perpanjang AD dan MN, lalu membuktikannya dengan relasi sudut atau juga kesebangunan. Kemudian kita dapat menggunakan phytagoras dan menyelesaikan sistem persamaan. Demikian soal ini merupakan soal **sulit-sangat sulit**.

20. Tentukan banyak bilangan asli n yang kurang dari 100 sehingga tepat sebanyak 9 pasangan bilangan asli (x, y) yang memenuhi

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{n}$$

Jawab: $\boxed{\mathbf{32}}$

Kalikan kedua ruas dengan xyn, kita peroleh

$$\begin{aligned}
ny + nx &= xy \\
0 &= xy - nx - ny \\
n^2 &= (x - n)(y - n)
\end{aligned}$$

Banyak solusi bilangan asli (x, y) sama dengan menentukan banyak faktor positif dari n^2.
Definition. Notasi $\tau(n)$ menyatakan banyak faktor positif dari n dengan n bilangan asli.

> **Teorema**
>
> Misalkan $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} p_3^{a_3} \cdots p_k^{a_k}$ dengan $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_k$ bilangan asli dan $p_1, p_2, p_3, \cdots, p_k$ bilangan prima yang berbeda. Maka
>
> $$\tau(n) = (a_1 + 1)(a_2 + 1)(a_3 + 1) \cdots (a_k + 1)$$

Misalkan $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} p_3^{a_3} \cdots p_k^{a_k}$ dengan $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_k$ bilangan asli dan $p_1, p_2, p_3, \cdots, p_k$ bilangan prima yang berbeda. Maka $n^2 = p_1^{2a_1} p_2^{2a_2} p_3^{2a_3} \cdots p_k^{2a_k}$. Demikian banyak solusi bilangan asli (x, y) yang memenuhi adalah

$$\tau\left(n^2\right) = (2a_1 + 1)(2a_2 + 1)(2a_3 + 1) \cdots (2a_k + 1)$$

Demikian $9 = (2a_1 + 1)(2a_2 + 1)(2a_3 + 1) \cdots (2a_k + 1)$. Karena $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_k$ bilangan asli, akibatnya

$$9 = (2a_1 + 1)(2a_2 + 1)(2a_3 + 1) \cdots (2a_k + 1) \geq \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 3}_{\text{sebanyak } k} = 3^k$$

yang menyimpulkan $9 \geq 3^k$. Demikian hanya terpenuhi ketika $k = 1$ atau $k = 2$.

- Untuk $k = 1$, maka $9 = 2a_1 + 1$ yang berarti $a_1 = 4$. Demikian $n = p_1^4$. Karena $n < 100$, maka dipenuhi ketika $p_1 = 2$ dan $p_2 = 3$ yang memberikan $n = 16$ dan $n = 81$.Demikian ada 2 nilai n.
- Untuk $k = 2$, maka $9 = (2a_1 + 1)(2a_2 + 1)$ yang terpenuhi ketika $2a_1 + 1 = 3$ dan $2a_2 + 1 = 3$ sehingga $a_1 = a_2 = 1$. Demikian $n = p_1 p_2$. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $p_1 < p_2$.

  Untuk $p_1 = 2$, maka $2 < p_2 < 50$ yang berarti ada 14 bilangan prima untuk p_2 yang memenuhi.

  Untuk $p_1 = 3$, maka $3 < p_2 < 33$ yang berarti ada 9 bilangan prima untuk p_2 yang memenuhi.

  Untuk $p_1 = 5$, maka $5 < p_2 < 20$ yang berarti ada 5 bilangan prima untuk p_2 yang memenuhi.

  Untuk $p_1 = 7$, maka $7 < p_2 < 14$ yang berarti ada 2 bilangan prima untuk p_2 yang memenuhi.

  Untuk $p_1 = 11$, maka $11 < p_2 < 9$ yang jelas tidak mungkin. Dapat disimpulkan bahwa untuk $p_1 > 11$ tidak ada yang memenuhi.

  Karena banyak nilai n bersifat *unik* dengan banyak pasangan (p_1, p_2), maka banyak nilai n yang memenuhi ada $14 + 9 + 5 + 2 = 30$.

Jadi, banyak bilangan asli n yang memenuhi ada $30 + 2 = \boxed{32}$.

> **Komentar.** Sebanyak 6.3% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Pada soal tersebut mengeluarkan sedikit tenaga untuk mendata kemungkinan nilai n yang memenuhi untuk $n = p_1 p_2$. Karena kita juga perlu mendata bilangan prima p_1 dan p_2 juga. Demikian soal ini dapat dikategorikan soal **sangat sulit**.